

## MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

### 1. Números e Álgebra:

Sexa  $A = (a_{ij})$  a matriz de dimensión  $3 \times 3$  definida por  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 2, \\ (-1)^j(i-1) & \text{se } i \neq 2. \end{cases}$  Explique se  $A$  e  $A + I$  son ou non invertibles e calcule as inversas cando existan. (Nota:  $a_{ij}$  é o elemento de  $A$  que está na fila  $i$  e na columna  $j$ , e  $I$  é a matriz identidade.)

### 2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro  $m$ , o sistema 
$$\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$$

### 3. Análise:

De entre tódolos rectángulos situados no primeiro cuadrante que teñen dous lados sobre os eixes de coordenadas e un vértice sobre a recta  $x + 2y = 4$ , determine os vértices do que ten maior área.

### 4. Análise:

Dada a función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$  calcule a área da rexión encerrada pola gráfica de  $f$  e as rectas  $y = 4x - 7$  e  $y = 1$ .

### 5. Xeometría:

- Obteña a ecuación implícita do plano  $\pi$  que pasa polos puntos  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,2,0)$  e  $C(0,0,3)$ .
- Calcule o punto simétrico de  $P(10, -5, 5)$  con respecto ao plano  $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ .

### 6. Xeometría:

- Ache o valor de  $a$  se o plano  $\pi: ax + y + z = 0$  é paralelo á recta  $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$ .
- Estude a posición relativa dos planos  $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$  e  $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$  en función do parámetro  $m$ .

### 7. Estatística e Probabilidade:

- Sexan  $A$  e  $B$  dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcule  $P(A)$  sabendo que  $P(B) = 2P(A)$ ,  $P(A \cap B) = 0.1$  e  $P(A \cup B) = 0.8$ .
- Diga se os sucesos  $A$  e  $B$  son ou non independentes, se se sabe que  $P(A) = 0.6$ ,  $P(B) = 0.3$  e  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$ .

### 8. Estatística e Probabilidade:

O portador dunha certa enfermidade ten un 10% de probabilidades de contaxiala a quen non estivo exposto a ela. Se entra en contacto con 8 persoas que non estiveron expostas, calcule:

- A probabilidade de que contaxie a un máximo de 2 persoas.
- A probabilidade de que contaxie a 2 persoas polo menos.

## MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

### 1. Números y Álgebra:

Sea  $A = (a_{ij})$  la matriz de dimensión  $3 \times 3$  definida por  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2, \\ (-1)^j(i-1) & \text{si } i \neq 2. \end{cases}$  Explique si  $A + I$  son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota:  $a_{ij}$  es el elemento de  $A$  que está en la fila  $i$  y en la columna  $j$ , e  $I$  es la matriz identidad.)

### 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema 
$$\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$$

### 3. Análisis:

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta  $x + 2y = 4$ , determine los vértices del que tiene mayor área.

### 4. Análisis:

Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$  calcule el área de la región encerrada por la gráfica de  $f$  y las rectas  $y = 4x - 7$  e  $y = 1$ .

### 5. Geometría:

- Obtenga la ecuación implícita del plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,2,0)$  y  $C(0,0,3)$ .
- Calcule el punto simétrico de  $P(10, -5, 5)$  con respecto al plano  $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ .

### 6. Geometría:

- Halle el valor de  $a$  si el plano  $\pi: ax + y + z = 0$  es paralelo a la recta  $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$ .
- Estudie la posición relativa de los planos  $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$  y  $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$  en función del parámetro  $m$ .

### 7. Estadística y Probabilidad:

- Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule  $P(A)$  sabiendo que  $P(B) = 2P(A)$ ,  $P(A \cap B) = 0.1$  y  $P(A \cup B) = 0.8$ .
- Diga si los sucesos  $A$  y  $B$  son o no independientes, si se sabe que  $P(A) = 0.6$ ,  $P(B) = 0.3$  y  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$ .

### 8. Estadística y Probabilidad:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

- La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.
- La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

## MATEMÁTICAS II

1.  $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$ . Ao ter unha fila de ceros, a matriz  $A$  non ten inversa.

$$a_{21} = a_{22} = a_{23} = 1, a_{31} = -2, a_{32} = 2 \text{ e } a_{33} = -2.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\det(A + I) = -2 - 2 = -4 \neq 0$ , polo que a matriz  $A + I$  si que ten inversa.

$$(A + I)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

## MATEMÁTICAS II

2.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & m & m+1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & 0 & m-2 & 0 \end{array} \right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y & = m, \\ my + 3z & = 1, \\ (m-2)z & = 0. \end{cases}$$

Discusión:

- Se  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ , entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é  $z = 0$ ,  $y = \frac{1}{m}$ ,  $x = m - 2y$ .

- Se  $m = 0$ , temos  $\begin{cases} x + 2y & = 0, \\ 3z & = 1, \\ -2z & = 0. \end{cases}$

O sistema é incompatible, porque as dúas últimas ecuacións non se poden cumprir á vez.

- Se  $m = 2$ , temos  $\begin{cases} x + 2y & = 2, \\ 2y + 3z & = 1, \\ 0 & = 0. \end{cases}$

O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$\left[ z = \lambda, \quad y = \frac{1 - 3\lambda}{2}, \quad x = 2 - (1 - 3\lambda) = 1 + 3\lambda \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

## MATEMÁTICAS II

### SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}, A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array} \right), \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como  $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ , é seguro que  $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$  e que  $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$ .

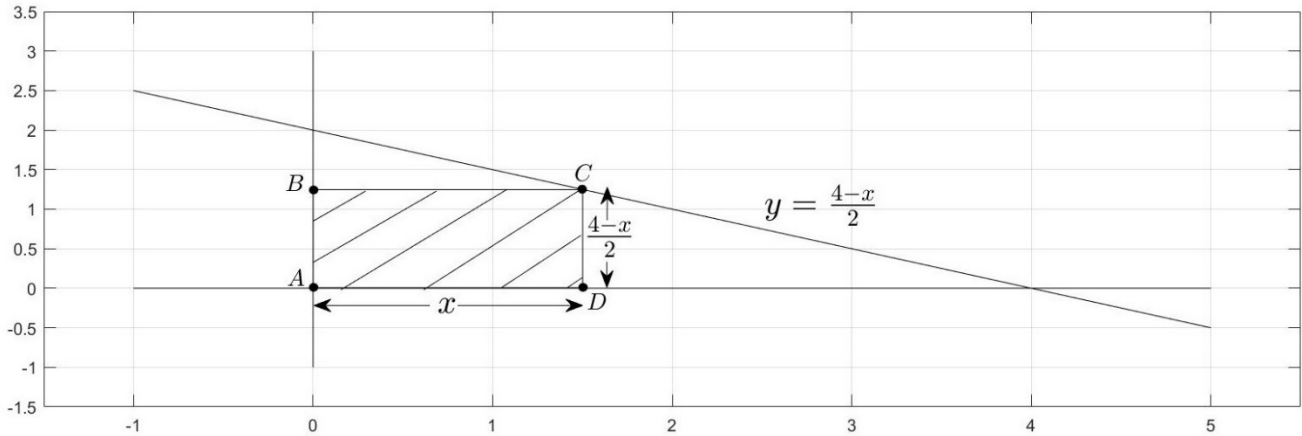
$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) + 6 - 3(m+2) = m^2 + m + 6 - 3m - 6 = m^2 - 2m \\ &= m(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ :**  $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.^\circ$  de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso  $m = 0$ :**  $\text{rank } A = 2$  e  $A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$ . Ao ser  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$ , tense que  $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$ , situación na que **o sistema é incompatible**.
- **Caso  $m = 2$ :**  $\text{rank } A = 2$  e  $A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{array} \right)$ . Ao ser  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 - 3 = 0$ , tense que  $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = n.^\circ$  de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.

## MATEMÁTICAS II

3.



Corte da recta  $x + 2y = 4$  co eixe de abscisas:

$$\begin{aligned}
 x + 2y = 4 &\Leftrightarrow y = \frac{4-x}{2}. \\
 \frac{4-x}{2} = 0 &\Leftrightarrow x = 4.
 \end{aligned}$$

Así pois, hai que achar o máximo de  $A(x) = x \left( \frac{4-x}{2} \right)$ ,  $x \in (0,4)$ .

$$A(x) = \frac{1}{2}(4x - x^2), \quad A'(x) = \frac{1}{2}(4 - 2x) = 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Hai máximo en  $x = 2$  porque  $A''(2) = -1 < 0$  (ou porque  $y = A(x)$  é a ecuación dunha parábola cóncava con vértice en  $x = 2$ ).

Posto que  $\frac{4-2}{2} = 1$ , os vértices pedidos son

$$\mathbf{A(0,0), B(0,1), C(2,1), D(2,0)}.$$

**NOTA:** como é frecuente facer, neste exercicio sobreentendemos que o vértice que ten que estar sobre a recta  $r: x + 2y = 4$  é o  $C$  (ver debuxo, arriba), que vai escorregando sobre  $r$ . Certamente, tamén se poderían engadir ao estudo os casos nos que

- é o punto  $B(0,2)$ , fixo, o que está sobre  $r$ , e
- é o punto  $D(4,0)$ , fixo, o que está sobre  $r$ ,

e, entón, non hai rectángulo de área máxima. En efecto, consideremos por exemplo o primeiro destes dous casos. Entón, a función pasa a ser  $A(x) = 2x$ , con  $x \in (0, \infty)$  ou, dependendo de interpretacións,  $x \in (0, \infty) \setminus \{4\}$ . Tanto cun dominio coma co outro, esa función non ten máximo. Esta aproximación ao problema tamén se considerará válida.

**MATEMÁTICAS II**

4.

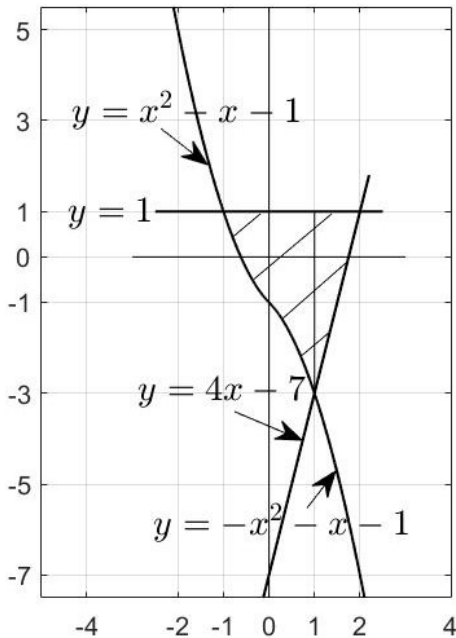
$$y = x^2 - x - 1, \quad y' = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad y'' = 2 > 0.$$

Logo  $y = x^2 - x - 1$  é unha parábola convexa con vértice en  $x = \frac{1}{2}$ .

$$y = -x^2 - x - 1, \quad y' = -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad y'' = -2 < 0.$$

Logo  $y = -x^2 - x - 1$  é unha parábola cóncava con vértice en  $x = -\frac{1}{2}$ .

$x$	$y = x^2 - x - 1$	$x$	$y = -x^2 - x - 1$	$x$	$y = 4x - 7$
0	-1	0	-1	0	-7
-1	1	1	-3	1	-3
-2	5	2	-7	2	1



Como vemos, ao buscar puntos para a representación gráfica xa poden saír os puntos de corte. Se non, procédese como segue.

- Corte de  $y = 1$  con  $y = x^2 - x - 1$ :

$$x^2 - x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x \in \{-1, 2\}.$$

Só nos interesa  $x = -1$ .

- Corte de  $y = 1$  con  $y = 4x - 7$ :

$$4x - 7 = 1 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

- Corte de  $y = 4x - 7$  con  $y = -x^2 - x - 1$ :

$$-x^2 - x - 1 = 4x - 7 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x \in \{-6, 1\}.$$

Só nos interesa  $x = 1$ .

A área pedida é

$$A = \int_{-1}^0 [1 - (x^2 - x - 1)] dx + \int_0^1 [1 - (-x^2 - x - 1)] dx + \left[ \text{área dun triángulo} \right]_{\text{de base 1 e altura 4}} =$$

$$\int_{-1}^0 (-x^2 + x + 2) dx + \int_0^1 (x^2 + x + 2) dx + \frac{1 \cdot 4}{2} =$$

$$\left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + 2 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) + 2 = 6.$$

## MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Plano  $\pi$  que pasa por  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,2,0)$  e  $C(0,0,3)$ :

$\pi$  pasa por  $A(1,0,0)$  e está xerado por  $\overrightarrow{AB}(-1,2,0)$  e  $\overrightarrow{AC}(-1,0,3)$ . Logo  $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$ .

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-1) + 2z + 3y = 6x + 3y + 2z - 6 \Rightarrow \pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

5.b) Punto simétrico de  $P(10, -5, 5)$  con respecto ao plano  $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ :

- Ecuacións paramétricas da recta  $r$  que pasa por  $P(10, -5, 5)$  e é perpendicular a  $\pi$ :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(6, 3, 2), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 10 + 6\lambda, \\ y = -5 + 3\lambda, \\ z = 5 + 2\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de  $r$  con  $\pi$ :

$$\begin{aligned} 6(10 + 6\lambda) + 3(-5 + 3\lambda) + 2(5 + 2\lambda) - 6 &= 60 + 36\lambda - 15 + 9\lambda + 10 + 4\lambda - 6 \\ &= 49\lambda + 49 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1. \end{aligned}$$

Logo o punto de corte é  $Q(10 - 6, -5 - 3, 5 - 2) = Q(4, -8, 3)$ .

- Punto simétrico pedido: se chamamos  $P'(x', y', z')$  ao punto,

$$\begin{aligned} \frac{10 + x'}{2} &= 4 \Leftrightarrow 10 + x' = 8 \Leftrightarrow x' = -2, \\ \frac{-5 + y'}{2} &= -8 \Leftrightarrow -5 + y' = -16 \Leftrightarrow y' = -11, \\ \frac{5 + z'}{2} &= 3 \Leftrightarrow 5 + z' = 6 \Leftrightarrow z' = 1. \end{aligned}$$

Tense logo  $P'(-2, -11, 1)$ .



## MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Como  $\pi: ax + y + z = 0$  é paralelo a  $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{n}_\pi(a, 1, 1)$  debe ser perpendicular a  $\vec{d}_r(1, 1, 1)$ :

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = a + 1 + 1 = a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2.$$

6.b) Posición relativa dos planos  $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$  e  $\pi_2: (m - 1)x + y + 3z = 0$ .

$$\left[ \frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{3} \right] \Leftrightarrow m = 3.$$

Como non son o mesmo plano cando  $m = 3$ ,

- Se  $m = 3$ , son paralelos (non coincidentes),
- Se  $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ , son secantes (córtanse nunha recta).

## **MATEMÁTICAS II**

**7.**

**7.a)**  $P(B) = 2P(A)$ ,  $P(A \cap B) = 0.1$  e  $P(A \cup B) = 0.8$ .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$0.8 = P(A) + 2P(A) - 0.1 \Leftrightarrow 0.8 = 3P(A) - 0.1 \Leftrightarrow 3P(A) = 0.9 \Leftrightarrow P(A) = \mathbf{0.3}.$$

**7.b)**  $P(A) = 0.6$ ,  $P(B) = 0.3$  e  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$ .

$$0.82 = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.82 = 0.18.$$

Como  $P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18 = P(A \cap B)$ , os sucesos **A** e **B** son independentes.

## **MATEMÁTICAS II**

**8.**  $X =$  “n.º de persoas contaxiadas, de entre as 8”.

$X \rightarrow B(n, p)$ , con  $n = 8$  e  $p = 0.1$  (logo  $q = 1 - p = 0.9$ ).

**8.a)**

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= \binom{8}{0} (0.1)^0 (0.9)^8 + \binom{8}{1} (0.1)^1 (0.9)^7 + \binom{8}{2} (0.1)^2 (0.9)^6 = \\ &= (0.9)^8 + 8(0.1)(0.9)^7 + 28(0.1)^2(0.9)^6 = \mathbf{0.9619}. \end{aligned}$$

**8.b)**

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - (0.9)^8 - 8(0.1)(0.9)^7 \\ &= \mathbf{0.1869}. \end{aligned}$$

## MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

### 1. Números e Álgebra:

Despece  $X$  na ecuación matricial  $B(X - I) = A$ , onde  $I$  é a matriz identidade e  $A$  e  $B$  son matrices cadradas, con  $B$  invertible. Logo, calcule  $X$  se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

### 2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro  $m$ , o seguinte sistema: 
$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$$

### 3. Análise:

a) Enuncie o teorema de Bolzano.

b) Obteña os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  que fan que  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$  cumpra  $f(0) = 1$  e teña extremos relativos en  $x = \pm 1$ . Dicar logo se os extremos son máximos ou mínimos.

### 4. Análise:

a) Enuncie o teorema de Rolle.

b) Calcule a área da rexión encerrada polas gráficas de  $f(x) = x + 6$  e  $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0, \\ x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

### 5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita do plano  $\pi$  con ecuacións paramétricas  $\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

b) Calcule o valor de  $m$  para que os seguintes puntos sexan coplanarios:  $A(0, m, 0)$ ,  $B(0, 2, 2)$ ,  $C(1, 4, 3)$  e  $D(2, 0, 2)$ . Obteña a ecuación implícita do plano  $\pi$  que os contén.

### 6. Xeometría:

Calcule o punto simétrico de  $P(1, 1, 2)$  con respecto ao plano  $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$ .

### 7. Estatística e Probabilidade:

Nunha determinada cidade, o 8% da poboación practica ioga, o 20% ten mascota e o 3% practica ioga e ten mascota. Se nesa cidade se elixe unha persoa ao azar, calcule:

a) A probabilidade de que non practique ioga e á vez teña mascota.

b) A probabilidade de que teña mascota sabendo que practica ioga.

### 8. Estatística e Probabilidade:

O grosor das pranchas de aceiro que se producen nunha certa fábrica segue unha distribución normal de media 8 mm e desviación típica 0.5 mm. Calcule a probabilidade de que unha prancha elixida ao azar teña un grosor comprendido entre 7.6 mm e 8.2 mm.

## MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

### 1. Números y Álgebra:

Despeje  $X$  en la ecuación matricial  $B(X - I) = A$ , donde  $I$  es la matriz identidad y  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas, con  $B$  invertible. Luego, calcule  $X$  si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

### 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el siguiente sistema: 
$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$$

### 3. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  que hacen que  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$  cumpla  $f(0) = 1$  y tenga extremos relativos en  $x = \pm 1$ . Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

### 4. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de  $f(x) = x + 6$  y  $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

### 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano  $\pi$  con ecuaciones paramétricas  $\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

b) Calcule el valor de  $m$  para que los siguientes puntos sean coplanarios:  $A(0, m, 0)$ ,  $B(0, 2, 2)$ ,  $C(1, 4, 3)$  y  $D(2, 0, 2)$ . Obtenga la ecuación implícita del plano  $\pi$  que los contiene.

### 6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de  $P(1, 1, 2)$  con respecto al plano  $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$ .

### 7. Estadística y Probabilidad:

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.

b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

### 8. Estadística y Probabilidad:

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

**MATEMÁTICAS II**

**1.**

$$B(X - I) = A \Leftrightarrow X - I = B^{-1}A \Leftrightarrow X = I + B^{-1}A.$$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$X = I + B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

## MATEMÁTICAS II

2.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & 0 & 1-2m \\ 0 & m & 1 & 1-m \end{array} \right) \begin{array}{l} F_3 - F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & 0 & 1-2m \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array} \right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ my = 1 - 2m, \\ z = m. \end{cases}$$

Discusión:

- Se  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é
 
$$z = m, \quad y = \frac{1-2m}{m}, \quad x = \frac{2m-y-z}{m}.$$
- Se  $m = 0$ , o sistema é incompatible, porque a segunda ecuación queda  $0 = 1$ .

### SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m - 1 = -m$  e  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - m - 1 = 1 - m$  non se anulan á vez, é seguro que  $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$  e que  $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$ .

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2m^2 + 2m + m + m^2 + m - m^2 - m - 2m - m^2 - m = m^2 = 0 \\ \Leftrightarrow m = 0.$$

Discusión:

- Caso  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :  $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.$  de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado.
- Caso  $m = 0$ :  $\text{rank } A = 2$  e  $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Ao ser  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0$ , tense que  $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$ , situación na que o sistema é incompatible.

## MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

Teorema de Bolzano:

Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é continua en  $[a, b]$  e  $f(a)f(b) < 0$ , entón existe polo menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

3.b)  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ ,  $f(0) = 1$ , e  $f$  ten extremos relativos en  $x = \pm 1$ .

•

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1.$$

•

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx - 3, \\ f'(-1) = 0 &\Leftrightarrow 3a - 2b - 3 = 0, \\ f'(1) = 0 &\Leftrightarrow 3a + 2b - 3 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3a - 2b - 3 = 0 \\ 3a + 2b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 1,$$

$$3 + 2b - 3 = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

•

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x.$$

$$[f'(-1) = 0, \quad f''(-1) = -6 < 0] \Rightarrow \text{máximo en } x = -1,$$

$$[f'(1) = 0, \quad f''(1) = 6 > 0] \Rightarrow \text{mínimo en } x = 1.$$



## MATEMÁTICAS II

4.

4.a)

Teorema de Rolle:

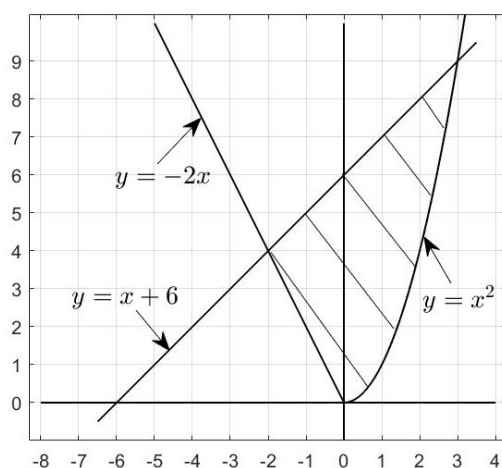
Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  e  $f(a) = f(b)$ , entón existe polo menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

4.b)

- $x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}$ .

Só nos interesa  $x = 3$ .

- $-2x = x + 6 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$ .



$$A = \left[ \begin{array}{l} \text{área dun triángulo} \\ \text{de base 6 e altura 2} \end{array} \right] + \int_0^3 (x + 6 - x^2) dx.$$

$$\int_0^3 (-x^2 + x + 6) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^3 = -9 + \frac{9}{2} + 18 = \frac{-18 + 9 + 36}{2} = \frac{27}{2}.$$

$$A = 6 + \frac{27}{2} = \frac{12 + 27}{2} = \frac{39}{2} = 19.5.$$

## MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Ecuación implícita de  $\pi$ : 
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$\pi$  pasa por  $P(1,2,1)$  e está xerado por  $\vec{u}(-1,0,1)$  e  $\vec{v}(0,1,2)$ . Logo  $\pi$ : 
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -z + 1 - x + 1 + 2y - 4 = -x + 2y - z - 2.$$

$$\pi: -x + 2y - z - 2 = 0.$$

5.b) Valor de  $m$  para que  $A(0,m,0)$ ,  $B(0,2,2)$ ,  $C(1,4,3)$  e  $D(2,0,2)$  sexan coplanarios. Ecuación implícita do plano  $\pi$  que os contén.

$\vec{BC}(1,2,1)$  e  $\vec{BD}(2,-2,0)$  son linealmente independentes, polo que os puntos  $B, C$  e  $D$  determinan o

plano que pasa por  $B$  e está xerado por  $\vec{BC}$  e  $\vec{BD}$ . Logo  $\pi$ : 
$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2y - 4 - 2z + 4 - 4z + 8 - 2x = 2x + 2y - 6z + 8,$$

de onde  $\pi: x + y - 3z + 4 = 0$ . Finalmente,  $A \in \pi \Leftrightarrow m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$ .

5.b) SOLUCIÓN ALTERNATIVA:  $\vec{BA}(0, m-2, -2)$ ,  $\vec{BC}(1,2,1)$ ,  $\vec{BD}(2,-2,0)$ . Ao ser  $\vec{BC}$  e  $\vec{BD}$  linealmente independentes, a condición para ser coplanarios é  $\text{rank } M = 2$ , sendo  $M = (\vec{BA} | \vec{BC} | \vec{BD})$ .

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Como  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 \neq 0$ , é seguro que  $\text{rank } M \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$  e que  $[\text{rank } M = 2 \Leftrightarrow \det M = 0]$ .

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 2m - 4 + 8 = 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4.$$

Por último, habería que calcular a ecuación que contén aos catro puntos, por exemplo como se fixo arriba.

## MATEMÁTICAS II

6. Punto simétrico de  $P(1,1,2)$  con respecto ao plano  $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$ .

- Ecuacións paramétricas da recta  $r$  que pasa por  $P(1,1,2)$  e é perpendicular a  $\pi$ :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(2, -1, 1), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 1 - \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de  $r$  con  $\pi$ :

$$2(1 + 2\lambda) - (1 - \lambda) + 2 + \lambda + 3 = 2 + 4\lambda - 1 + \lambda + 5 + \lambda = 6\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Logo o punto de corte é  $Q(1 - 2, 1 + 1, 2 - 1) = Q(-1, 2, 1)$ .

- Punto simétrico pedido: se chamamos  $P'(x', y', z')$  ao punto,

$$\frac{1 + x'}{2} = -1 \Leftrightarrow 1 + x' = -2 \Leftrightarrow x' = -3,$$

$$\frac{1 + y'}{2} = 2 \Leftrightarrow 1 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 3,$$

$$\frac{2 + z'}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 + z' = 2 \Leftrightarrow z' = 0.$$

Tense logo  $P'(-3, 3, 0)$ .

## MATEMÁTICAS II

7.  $I =$  “practicar ioga”,  $M =$  “ter mascota”.

$$P(I) = 0.08, \quad P(M) = 0.20, \quad P(I \cap M) = 0.03.$$

	$M$	$\bar{M}$	
$I$	$100 \cdot 0.03 = 3$		$100 \cdot 0.08 = 8$
$\bar{I}$	17		
	$100 \cdot 0.20 = 20$		100

7.a) Pola táboa de continxencia:

$$P(\bar{I} \cap M) = \frac{17}{100} = \mathbf{0.17}.$$

7.a) SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$P(M) = P(I \cap M) + P(\bar{I} \cap M) \Leftrightarrow 0.20 = 0.03 + P(\bar{I} \cap M) \Leftrightarrow P(\bar{I} \cap M) = \mathbf{0.17}.$$

7.b) Pola táboa de continxencia:

$$P(M|I) = \frac{3}{8} = \mathbf{0.375}.$$

7.b) SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$P(M|I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0.03}{0.08} = \mathbf{0.375}.$$

## MATEMÁTICAS II

8.  $X =$  “grosor en mm dunha prancha de aceiro”.

$$X \rightarrow N(8,0.5) \Rightarrow Z = \frac{X - 8}{0.5} \rightarrow N(0,1).$$

$$\begin{aligned} P(7.6 \leq X \leq 8.2) &= P\left(-\frac{0.4}{0.5} \leq Z \leq \frac{0.2}{0.5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.4) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.8) \\ &= P(Z \leq 0.4) - P(Z \geq 0.8) = P(Z \leq 0.4) - \{1 - P(Z \leq 0.8)\} = P(Z \leq 0.4) + P(Z \leq 0.8) - 1 = \\ &0.6554 + 0.7881 - 1 = \mathbf{0.4435}. \end{aligned}$$