Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

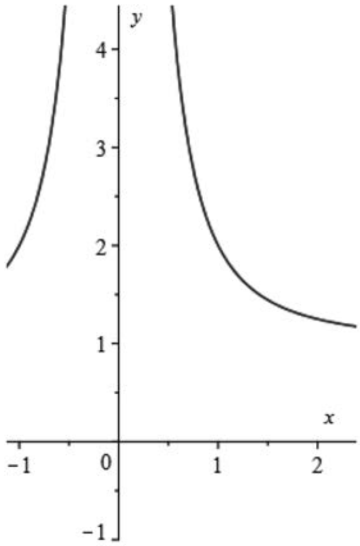
Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Trazamos la recta tangente a la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$ por un punto $P=(a,f(a))$ del primer cuadrante. Esta recta junto con los ejes de coordenadas forman un triángulo.



***a*)** Compruebe que el área de este triángulo, en función de a, viene dada por la función

$$g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

[1,25 puntos]

***b*)** ¿En qué punto P el área del triángulo es mínima? Calcule ese valor mínimo.
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	*a*	
	b	
	Total	

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real k:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

***a*)** Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.
[1,25 puntos]

***b*)** Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $k = 0$.
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. ***a)*** Calcule la ecuación general del plano π que pasa por el punto (8, 8, 8) y tiene como vectores directores $\boldsymbol{u} = (1, 2, -3)$ y $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 3)$.

[1,25 puntos]

b) Determine el valor del parámetro a para que el punto $(1, -5, a)$ pertenezca al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por este punto y es perpendicular al plano π.

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. Considere la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x}$, donde a y b son dos parámetros reales. Calcule los valores de a y b de manera que la función $f(x)$ tenga una asíntota oblicua de pendiente 1 y un mínimo en el punto de la gráfica de abscisa $x = 2$.

[2,5 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	Total	

5. Sea la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

***a*)** Encuentre la matriz $\boldsymbol{X}$ que satisface la ecuación $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I} - 3\boldsymbol{X}$, donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad de orden 2.

[1,25 puntos]

b*)** Compruebe que la matriz ***X es invertible y calcule su matriz inversa.
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. Considere la función $f(x) = x^3$.

***a*)** Calcule en qué punto del tercer cuadrante la recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a la recta $3x - y = 4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en este punto y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función y las dos rectas.

[1,25 puntos]

b) Calcule el área de la región delimitada por $y = f(x)$ y la recta $y = 3x + 2$.
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	*a*	
	b	
	Total	

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

Etiqueta de l'alumne/a

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 3

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

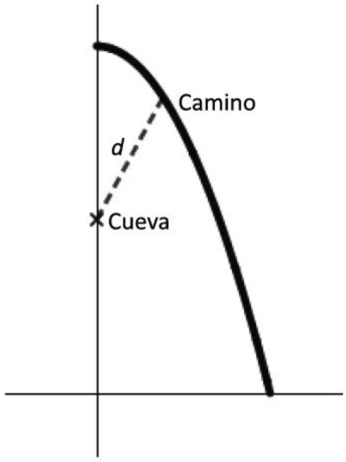
1. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Determine el rango de la matriz $\boldsymbol{A}$ en función del parámetro a.
[1,25 puntos]

b) Compruebe que $\det(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}) = 0$.
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	*a*	
	b	
	Total	

2. Se han encontrado unas pinturas rupestres en una cueva situada en una zona muy pedregosa. Existe un camino que bordea parcialmente la cueva formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos (0, 4) y (2, 0). La cueva está situada en el punto de coordenadas (0, 2), tal como se muestra en la figura, y quiere habilitarse un acceso rectilíneo d desde el camino a la cueva que sea lo más corto posible.



***a*)** Identifique en la gráfica de la figura las coordenadas de la cueva y del punto del camino desde el cual quiere habilitarse el acceso. Compruebe que la función $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distancia desde cada punto del camino a la cueva.

[1,25 puntos]

***b*)** Calcule las coordenadas del punto del camino que se halla más próximo a la cueva y diga cuál será la longitud del acceso *d*.

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

***a*)** Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.
[1,25 puntos]

***b*)** Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. Sea la función $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln(x)$, donde ln indica el logaritmo neperiano, definida para $x>0$.

***a*)** Calcule las coordenadas del punto de la curva $y=f(x)$ en que la recta tangente a la curva en ese punto es horizontal. Estudie si este punto es un extremo relativo y clasifíquelo.

[1,25 puntos]

***b*)** Calcule el área del recinto delimitado por la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = 1$ y $x = \mathrm{e}$ y el eje de abscisas.

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	*a*	
	b	
	Total	

5. Considere la recta r de ecuación $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ y la recta s que pasa por el punto $P=(2,-5,1)$ y que tiene por vector director $(-1,0,-1)$.

a) Estudie la posición relativa de las rectas r y s.

[1,25 puntos]

***b*)** Calcule la ecuación general del plano que es paralelo a la recta *r* y contiene la recta *s*.
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. Una empresa de cerámica quiere poner a la venta un azulejo cuadrado de 20 cm de lado pintado a dos colores, de manera que la superficie de cada color sea la misma y que si se ponen los azulejos uno al lado de otro se vea un dibujo continuo (figura 1).

Figura 1

Figura 2

Para ello, la empresa utiliza en cada azulejo la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ encuadrada entre los puntos de coordenadas (0, 0), (0, 2), (2, 0) y (2, 2), tal como se muestra en la figura 2, y usa como unidad de medida el decímetro.

a) Justifique que, efectivamente, esta función permite juntar los azulejos de manera continua y derivable.

[1,25 puntos]

***b*)** Justifique que esta función divide el cuadrado citado en dos partes que tienen la misma superficie.

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	*a*	
	b	
	Total	

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

Etiqueta de l'alumne/a

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés