

# Matemàtiques

## Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Considere las rectas  $y = x$  e  $y = 2x$ , y la parábola  $y = x^2$ .
  - a) Calcule los puntos de intersección entre las gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada por las gráficas.  
[1 punto]
  - b) Calcule el área de la región del apartado anterior.  
[1 punto]

2. Considere la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$ , donde  $a$  es un parámetro real.

- a) Encuentre los valores del parámetro  $a$  para los cuales la matriz es invertible.  
[1 punto]
- b) Discuta la posición relativa de los planos  $\pi_1: x + (a-1)z = 0$ ,  $\pi_2: x + ay + z = 1$  y  $\pi_3: 4x + 3ay + z = 3$  en función de los valores del parámetro  $a$ .  
[1 punto]

3. Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

- a) Calcule  $A \cdot B$  y  $B \cdot A$ .  
[1 punto]
- b) Justifique que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene por resultado la matriz nula, entonces el determinante de ambas matrices tiene que ser cero.  
[1 punto]

4. Considere la función  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .
- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en los que la recta tangente es horizontal.  
[1 punto]
- b) Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función  $f(x)$  en que la pendiente de la recta tangente es máxima.  
[1 punto]
5. Sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  los puntos de intersección del plano de ecuación  $x + 4y + 2z = 4$  con los tres ejes de coordenadas  $OX$ ,  $OY$  y  $OZ$ , respectivamente.
- a) Calcule los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , y el perímetro del triángulo de vértices  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .  
[1 punto]
- b) Calcule el área del triángulo de vértices  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .  
[1 punto]
- NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  puede usar la expresión  $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ , donde  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  es el producto vectorial de los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ .
6. Considere la función  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .
- a) Calcule el dominio de la función  $f$ , los puntos de corte de la gráfica de  $f$  con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f$ .  
[1 punto]
- b) Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función  $f$ , las rectas  $x = 1$  y  $x = e$ , y el eje de abscisas.  
[1 punto]

