



Matemàtiques

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 de superficie, con márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm en cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la mayor superficie impresa posible.

[2 puntos]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real k :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

[1 punto]

- b) Resuelva el sistema para el caso $k = -1$.

[1 punto]

3. Un dron se encuentra en el punto $P = (2, -3, 1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo del plano de ecuación $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$.

- a) Calcule la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que debe seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?

[1 punto]

- b) Encuentre las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia que hay de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al

plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

4. Considere la función $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$.
- a) Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical?
[1 punto]
- b) Observe que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ y $f(2) = -10$. Razone si, a partir de esta información, puede deducirse que el intervalo $(-2, 0)$ contiene un cero de la función. ¿Puede deducirse para el intervalo $(0, 2)$? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.
[1 punto]
5. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.
- a) Calcule para qué valores del parámetro a se cumple la igualdad $M^2 - M - 2I = \mathbf{0}$, donde I es la matriz identidad y $\mathbf{0}$ es la matriz nula, ambas de orden 2.
[1 punto]
- b) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre una expresión general para calcular la matriz inversa de la matriz M y, a continuación, calcule la inversa de M para el caso $a = \sqrt{2}$.
[1 punto]
6. Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.
- a) Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcule las coordenadas del punto de intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.
[1 punto]
- b) Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior.
[1 punto]





Matemàtiques

Serie 4

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Quiere construirse un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m^2 . Se sabe que el precio de la madera es de $7,5 \text{ €/m}$ para los lados horizontales y de $12,5 \text{ €/m}$ para los lados verticales. Determine las dimensiones que debe tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo?

[2 puntos]

2. Sean la recta $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: x - z = 3$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que es perpendicular al plano π y que lo corta en el mismo punto en el que lo corta la recta r .

[1 punto]

b) Encuentre los puntos de r que están a una distancia de $\sqrt{8}$ unidades del plano π .

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia que hay de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al

plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

[1 punto]

4. Considere la función $f(x)$, que depende de los parámetros reales n y m y está definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcule los valores de n y m para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales.

[1 punto]

b) Para el caso $n = -4$ y $m = -6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

[1 punto]

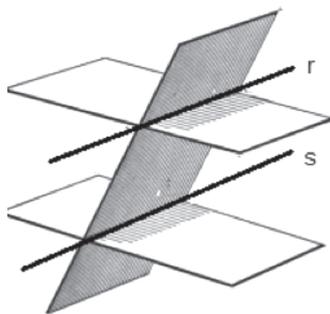
5. Considere los planos $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ y $\pi_3: 2x + (a + 1)y + (a + 1)z = 0$, donde a es un parámetro real.

a) Estudie para qué valores del parámetro a los tres planos se cortan en un punto.

[1 punto]

b) Compruebe que para el caso $a = 1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la siguiente imagen:

[1 punto]



6. Se sabe que una función $f(x)$ es continua y derivable en todos los números reales, que tiene como segunda derivada $f''(x) = 6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal.

a) Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

[1 punto]

b) Sabiendo, además, que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5$, calcule la expresión de la función f .

[1 punto]