

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Estructura de la prueba: la prueba se compone de dos opciones "A" y "B", cada una de las cuales **consta de cinco preguntas** que, a su vez, comprenden varias cuestiones. Sólo se podrá contestar una de las dos opciones, desarrollando íntegramente su contenido. En el caso de mezclar preguntas de ambas opciones la prueba será calificada con 0 puntos.

Puntuación: la calificación máxima total será de 10 puntos, estando indicada en cada pregunta su puntuación parcial.

Tiempo: 1 hora y 30 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

(2 puntos) Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales, determinando para qué valor o valores del parámetro a el sistema es compatible. Resolver el sistema resultante para el caso o los casos en los que el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + ay - z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2

Dados los planos de ecuaciones

$$\pi_1 \equiv 2x + y + 2z - 3 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv x - y - 2z = 0$$

- (1 punto) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de dichos planos.
- (1 punto) Hallar la ecuación del plano paralelo a $\pi_1 \equiv 2x - y + 3z + 3 = 0$ que pasa por el punto $(1, 0, 1)$.

Ejercicio 3

(3 puntos) Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) (1 punto) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 5x - 27}{x(x+3)} \quad \text{b) (1 punto) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{6x}{x^2 - 1} - \frac{3}{x - 1} \right) \quad \text{c) (1 punto) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4} - x$$

Ejercicio 4

(2 puntos) Determinar si es invertible o no y, en caso afirmativo, hallar la matriz inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

(1 punto) Siendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, calcula el valor de los parámetros a, b y c que aparecen en dicha expresión explícita de la función f sabiendo que $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ y que $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1

(2 puntos) Hallar la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x + 2z = 0$, $\pi_2 \equiv x + y + 2z = 0$ y $\pi_3 \equiv 2x + 3y = 0$.

Ejercicio 2

(2 puntos) Hallar los valores del parámetro a para los que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es invertible. Para dichos valores,

obtener su matriz inversa.

Ejercicio 3

Dada la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 16}{(2x + 4)} & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^2 - 4}{(x + 2)} & \text{si } x > -2 \\ -4 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar su continuidad.

b) (2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Ejercicio 4

(2 puntos) Se dispone de un trozo de cartulina de 100 cm de lado. Hallar el lado del cuadrado que hay que cortar en sus cuatro esquinas para que doblando la cartulina se obtenga una caja sin tapa cuyo volumen sea máximo.

Ejercicio 5

(1 punto) Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & x \\ 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y GUIÓN DE RESPUESTAS

OPCIÓN A:

Ejercicio 1

Solución: El sistema es compatible y determinado para todos los valores de $a \neq 1$. Si $a = 1$, el sistema es incompatible. Cuando $a \neq 1$, la solución es

$$[x,y,z] = [(2(a-1)a-1)/2, 1/(2(a-1)), (1+2a)/2]$$

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 2

a) **Solución:** $[x,y,z] = [1, 1-2t, t], t \in \mathbf{R}$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

b) **Solución:** $2x - y + 3z - 5 = 0$

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

Ejercicio 3

Soluciones:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 5x - 27}{x(x+3)} = -3, \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{6x}{x^2 - 1} - \frac{3}{x - 1} \right) = \frac{3}{2}, \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4} - x = 0$$

Planteamiento y razonamiento correctos de cada apartado: 0.5 puntos.

Solución correcta de cada apartado: 0.5 puntos.

Ejercicio 4

Solución: La matriz es invertible. La matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 5

Solución:

$f(x) = 2x - 1$, es decir, $a = 0, b = 2, c = -1$.

Planteamiento y razonamiento correcto: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

OPCIÓN B:**Ejercicio 1****Solución:**

Los tres planos se cortan en el origen de coordenadas formando un triedro.

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 2

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2-a \end{pmatrix}$$

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 3

a) **Solución:** La función no es continua en $x=-2$, pero si en el resto de la recta real.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

b) **Solución:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

Planteamiento y razonamiento correctos de cada apartado: 0.5 puntos.

Solución correcta de cada apartado: 0.5 puntos.

Ejercicio 4

Solución: El lado del cuadrado es $x=25$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 5

Solución: $x=-4/3$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.