

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Estructura de la prueba: la prueba se compone de dos opciones "A" y "B", cada una de las cuales **consta de cinco preguntas** que, a su vez, comprenden varias cuestiones. Sólo se podrá contestar una de las dos opciones, desarrollando íntegramente su contenido. En el caso de mezclar preguntas de ambas opciones la prueba será calificada con 0 puntos.

Puntuación: la calificación máxima total será de 10 puntos, estando indicada en cada pregunta su puntuación parcial.

Tiempo: 1 hora y 30 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

- a) (1 punto) Sabiendo que $A(0,1,0)$ es el punto medio del segmento PQ y que $P(-1,0,0)$, calcula las coordenadas del punto Q .

Ejercicio 2

(2 puntos) Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, y resolver la siguiente ecuación matricial o, lo que es lo mismo, calcular los valores de x , y , z y u para los que es cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3

- a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano paralelo a $\pi_1 \equiv x + 2y + 3z - 1 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1, -1, 1)$.
- b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv x - 1 = y + 2 = z$ y al punto $P(3, 1, 2)$.
- c) (1 punto) Determinar si son secantes o no el plano $\pi_1 \equiv 2x + y = 0$ y la recta r determinada por los puntos $P(1, 1, -1)$ y $Q(2, 1, 0)$.

Ejercicio 4

Dada la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} + \frac{x^2 + 5}{x^2 + 5x + 6} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a. (1 punto) Estudia su continuidad.
- b. (1 punto) Calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- c. (1 punto) Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Ejercicio 5

(1 punto) Hallar los valores de x para los que el siguiente determinante es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1

(2 puntos) Dados los puntos $A(1,1,0)$ y $B(-1,1,0)$, hallar las coordenadas del punto $C(x, y, 0)$ del plano $z = 0$ para que el triángulo ABC contenido en dicho plano sea equilátero.

Ejercicio 2

- a) (1 punto) Hallar la distancia entre los planos $\pi_1 \equiv 4x + 2y - 2z - 7 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z - 3 = 0$.
- b) (1 punto) Determinar la posición relativa (es decir, si se cortan en un punto, se cruzan, son paralelas o son coincidentes) de las rectas r_1 que pasa por el punto $P(1,2,1)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (1,1,2)$ y la recta r_2 que pasa por $Q(3,3,-1)$ y es paralela a $\vec{v} = (-2,-1,2)$.
- c) (1 punto) Determinar el valor del parámetro λ para que los puntos $A(3,1)$, $B(2,0)$ y $C(5,\lambda)$ estén alineados.

Ejercicio 3

(1 punto) Calcular el valor del parámetro a para que sea continua la función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2\text{sen}(x) + xe^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x-a}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4

Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 - 3)^2}{x^6 + 5x^3 - 7x + 2}$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{5x^3 - 5x}$

Ejercicio 5

(2 puntos) Determinar si la siguiente matriz es invertible o no y, en caso afirmativo, calcular su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y GUIÓN DE RESPUESTAS

OPCIÓN A:

Ejercicio 1

Solución $Q = (1, 2, 0)$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

Ejercicio 2

Solución: La inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ es $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y la solución es $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 3

a) **Solución:** $\pi \equiv x + 2y + 3z = 0$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

b) **Solución:** $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos

c) **Solución:** Son secantes en el punto $(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

Ejercicio 4

a) **Solución:** La función es continua en todos los puntos salvo en $x=0$ ($f^+(0) = 11/6$; $f^-(0) = 2$).

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

b) **Solución:** $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} x^2 + 2 = \infty$

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

c) **Solución:** $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(-x)} + \frac{x^2 + 5}{x^2 + 5x + 6} = 1$

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

Ejercicio 5

Solución: El determinante es igual a cero para $x=1/2$, $x=-1$

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

OPCIÓN B:

Ejercicio 1

a) **Solución:** $C = (0, 1 + \sqrt{3}, 0)$ y $C = (0, 1 - \sqrt{3}, 0)$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 2

a) **Solución:** $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

b) **Solución:** Las rectas se cortan en el punto $P = (1, 2, 1)$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

c) **Solución:** $\lambda = 3$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

Ejercicio 3

Solución: La función es continua para $a = 0$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

Ejercicio 4

Soluciones:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 - 3)^2}{x^6 + 5x^3 - 7x + 2} = 4$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{5x^3 - 5x} = 0$

Planteamiento y razonamiento correctos de cada apartado: 0.5 puntos.

Solución correcta de cada apartado: 0.5 puntos.

Ejercicio 5

Solución: La matriz es invertible. Su matriz inversa es $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.