UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID





Convocatoria 2019

Modelo

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **CALIFICACIÓN:** Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m \end{array}\right)$$

donde *m* es un parámetro real.

- a) Determínense los valores de *m* para los que la matriz *A* es invertible.
- b) Para m = 2, calcúlese la matriz inversa de A.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \le 4$$
; $y + 3x \le 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

- a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función f(x, y) = -x + 3y en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1} \ .$$

- a) Calcúlese su dominio así como sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.
- b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

La banda de versiones de rock 7H tiene un cantante masculino, Antonio, y una cantante femenina, Inma. En cada canción uno y sólo uno de ellos es la voz solista. El 80 % de las canciones de su repertorio son en inglés y el 20 % restante son en castellano. Antonio es el solista del 75 % de las canciones que son en inglés. El 25 % restante las interpreta Inma. El 15 % de las canciones del repertorio las canta Inma en castellano. Se toma al azar una canción del repertorio del grupo 7H. Calcúlese la probabilidad de que:

- a) Sea una canción en inglés y que la cante Antonio.
- b) La cante Inma.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El contenido en sal, medido en gramos (gr), de los frascos de soja de 100 ml de una conocida marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ gr y desviación típica σ = 0'1 gr.

- a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0'01 gr, con un nivel de confianza del 95 %.
- b) Sabiendo que μ = 9'1 gr, calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la media del contenido en sal de esos frascos sea menor o igual que 9'09 gr.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases}
6x + 2y + z &= 0 \\
x + 3y + z &= 0 \\
5x - y + az &= 0
\end{cases}$$

- a) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro a.
- b) Resuélvase el sistema para a = 0.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1, \\ x^2 - 1 & \text{si } x \ge -1. \end{cases}$$

- a) Determínese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el cual f(x) es una función continua en x = -1.
- b) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas x = 0 y x = 1 y la gráfica de f(x).

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 4.$$

- a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En un partido de futbol coinciden en el estadio aficionados del equipo local y el visitante. El 85 % de los asistentes son aficionados del equipo local y el 15 % restante aficionados del equipo visitante. El 50 % del total de asistentes son mujeres aficionadas del equipo local. De los aficionados del equipo visitante un 40 % son hombres. Se toma un asistente al estadio al azar. Calcúlese la probabilidad de que:

- a) Sea un hombre y aficionado del equipo local
- b) Sea aficionado del equipo visitante y mujer.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

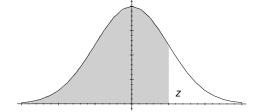
Según un estudio realizado en la Comunidad de Madrid el promedio de horas (h) semanales que dedica durante el curso un estudiante de segundo de bachillerato al estudio de la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ h y desviación típica σ = 0'5 h.

- a) Con una muestra de tamaño 100 se obtuvo un intervalo de confianza para μ de [4'902; 5'098]. Determínese el nivel de confianza utilizado para la obtención de tal intervalo.
- b) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 25 para la que se obtiene una media muestral de $\overline{x} = 5$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ .

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z.



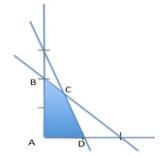
Z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES OPCIÓN A

- 1. *a*) El determinante de la matriz A es |A| = -m. Por lo tanto, si $m \ne 0$ la matriz es invertible. Para m = 0 la matriz no tiene inversa.
 - b) Para m = 2 la matriz A tiene inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) Dibujamos la región S y calculamos los vértices:



Con A = (0, 0), B = (0, 4), y D = (2, 0). El vértice C es la intersección de las rectas:

$$\begin{cases} y + x = 4 \\ y + 3x = 6 \end{cases} \longrightarrow (1,3)$$

- b) La función objetivo es f(x, y) = -x + 3y. Como la región es cerrada y acotada, evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:
 - f(0,0) = 0
 - $f(0,4) = 12 \rightarrow Máximo$
 - f(1,3) = 8
 - $f(2,0) = -2 \rightarrow M$ ínimo

Resumiendo, el valor máximo de f(x, y) en S es 12 y se da en el punto (0, 4). El valor mínimo de f(x, y) en S es -2 y se da en el punto (2, 0).

3. a) Al ser la función un cociente de polinomios los únicos puntos que no partenecerían al dominio serían aquellos que anulen el denominador. Pero la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales y por lo tanto $domf(x) = \mathbb{R}$.

Asíntotas

- *Verticales*: El mismo argumento del dominio sirve para afirmar que no tiene asíntotas verticales, ya que nunca se anula el denominador.
- *Horizontales*: Calculamos los límites de la función en $\pm \infty$:

$$\lim_{x \to \pm \infty} f(x) = \lim_{x \to \pm \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1} = 1$$

Por lo tanto y = 1 es asíntota horizontal de f(x) tanto cuando $x \to \infty$ como para $x \to -\infty$.

b) La ecuación de la recta tangente en el punto x = 0 es y = f(0) + f'(0)(x - 0). Calculamos primero la derivada de f(x):

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Así, en el punto x = 0 tenemos: f(0) = 2, f'(0) = -2. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente pedida es:

$$y = 2 - 2x$$

4. Denotamos los sucesos:

$$I = \{\text{Canción en Ingles}\} \Rightarrow \bar{I} = \{\text{Canción en Castellano}\}\$$

$$A = \{ \text{Canta Antonio} \} \Rightarrow \overline{A} = \{ \text{Canta Inma} \}$$

Sabemos entonces que:

$$P(I) = 0.8 \quad P(A|I) = 0.75 \quad P(\overline{A} \cap \overline{I}) = 0.15$$

- a) Nos piden $P(I \cap A) = P(A|I) \cdot P(I) = 0'75 \cdot 0'8 = 0'6$
- b) Ahora nos piden $P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap I) + P(\overline{A} \cap \overline{I}) = P(\overline{A}|I) \cdot P(I) + P(\overline{A} \cap \overline{I}) = (1 P(A|I)) \cdot P(I) + P(\overline{A} \cap \overline{I}) = 0'25 \cdot 0'8 + 0'15 = 0'35$
- 5. *a*) El error en la estimación de μ viene dado por $\epsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, por lo tanto:

$$\epsilon = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \frac{0'1}{\sqrt{n}} \le 0'01 \Rightarrow n \ge (19'6)^2 = 384'16$$

Así pues, el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 385.

b) Queremos calcular

$$P[\overline{X} \le 9] = P[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{9 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}] =$$

$$=P[Z \le \frac{9'09-9'1}{0'1/\sqrt{20}}] = P[Z \le -0'447] = 1 - P[Z \le 0'447] = 1 - 0'6736 = 0'3264$$

Con $Z \sim N(0, 1)$.

SOLUCIONES OPCIÓN B

1. *a*) El sistema es homogéneo por lo cual siempre será compatible. Así pues sólo debemos decidir si es compatible determinado o indeterminado. La matriz del sistema es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & a \end{array}\right)$$

Cuyo determinante es |A| = 16a.

Por lo tanto:

- Si $a \neq 0$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.
- Si a = 0, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO ya que el rango de la matriz es menor que 3, el número de incógnitas. Como además:

$$\left|\begin{array}{cc} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{array}\right| = 16 \neq 0$$

el rango de la matriz del sistema es 2 y entonces el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO con un grado de libertad.

b) Para a = 0 el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad. Resulta:

$$\begin{cases} 6x + 2y + z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ 5x - y &= 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x + 2y + z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \end{cases}$$

ya que la tercera ecuación es la resta de las dos primeras. Además:

$$\left(\begin{array}{ccc} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim_{f2-6f1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -16 & -5 \end{array}\right)$$

Tomando por ejemplo z como variable libre, se obtiene:

$$\begin{cases} y = -5z/16 \\ x = -z - 3y = -z - 3(-5z/16) = -z/16 \end{cases}$$

2. a) Necesitamos que $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$

$$\begin{cases} f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (2x + a) = a - 2 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Por tanto, para que f(x) sea continua en x = -1 se debe de cumplir que a - 2 = 0, es decir, que a = 2.

b) La función f(x) en [0, 1] es $f(x) = x^2 - 1$, que es negativa en todo ese intervalo. Por tanto,

área =
$$\left| \int_0^1 (x^2 - 1) dx \right| = -\left[\frac{(x^3)}{3} - x \right]_0^1 = -(1/3 - 1) = 2/3u^2$$

3. a) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) calculamos su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$

Igualamos a cero:

$$3x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = 5$$

Ahora miramos el signo:

- En $(-\infty, 1)$ f'(x) > 0 por lo tanto f(x) es creciente en $(-\infty, 1]$.
- En (1,5) f'(x) < 0 por lo que f(x) es decreciente en [1,5].
- En $(5, \infty)$ f'(x) > 0 por lo que f(x) es creciente en $[5, \infty)$.

- b) La función es derivable en \mathbb{R} por lo que los candidatos a máximo o mínimo de f(x) son aquellos puntos en que la derivada se anula, es decir x = 1 y x = 5.
 - En x = 1 la función pasa de ser creciente a decreciente por lo que x = 1 es un máximo local de la función.
 - En x = 5 la función pasa de ser decreciente a creciente por lo que x = 5 es un mínimo local de la función.

Alternativamente: Sabemos que los puntos críticos de la función (derivada igual a cero) son x = 1 y x = 5. Calculamos la segunda derivada de f y sustituimos por estos valores.

$$f''(x) = 6x - 18$$

- f''(1) = 6(1) 18 = -12 < 0 por lo que x = 1 es un máximo local de f(x).
- f''(5) = 6(5) 18 = 12 > 0 por lo que x = 5 es un mínimo local de f(x).
- 4. Denotamos los sucesos:

$$A = \{Aficionado equipo local\} \Rightarrow \overline{A} = \{Aficionado equipo visitante\}$$

$$B = \{ \mathsf{Hombre} \} \Rightarrow \overline{B} = \{ \mathsf{Mujer} \}$$

Sabemos entonces que

$$P(A) = 0'85$$
 $P(\overline{B} \cap A) = 0'5$ $P(B|\overline{A}) = 0'4$

- a) Nos piden calcular $P(A \cap B) = P(A) P(A \cap \overline{B}) = 0'85 0'5 = 0'35$.
- b) Ahora nos piden $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = (1 P(B|\overline{A})) \cdot P(\overline{A}) = (1 0'4)0'15 = 0'6 \cdot 0'15 = 0'09.$
- 5. *a*) La amplitud del intervalo de confianza es $2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5'098 4'902 = 0'196$. Por lo tanto $z_{\alpha/2}\frac{0'5}{\sqrt{100}} = 0'098$, de donde $z_{\alpha/2} = 0'98 \cdot 2 = 1'96$.

Así pues, mirando en la tabla, el nivel de confianza es del 95 %.

b) El intervalo de confianza para μ viene dado por $[\overline{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$, donde $z_{\alpha/2} = 2'58$. Por lo tanto el intervalo es:

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos). Apartado (a): 1 punto.	
Cálculo correcto del determinante	
Apartado (b): 1 punto. Cálculo correcto de la matriz inversa	
Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos). Apartado (a): 1 punto.	
Representación correcta de la región S	
Determinación correcta de las coordenadas del máximo y mínimo0,50 puntos Determinación correcta del valor máximo y mínimo0,50 puntos	
Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos). Apartado (a): 1 punto.	
Determinación correcta del dominio	
Justificación de la no existencia de AV	
Determinación de las asíntotas horizontales0,50 puntos. Apartado (b): 1 punto.	•
Expresión correcta de la ecuación de la tangente0,25 puntos.	
Cálculo correcto de la derivada0,50 puntos	
Ecuación correcta de la tangente	-
Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos). Apartado (a): 1 punto.	
Planteamiento correcto0,50 puntos	
Cálculo correcto de la probabilidad pedida	
Planteamiento correcto	
Calculo correcto de la probabilidad pedida	•
Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos). Apartado (a): 1 punto.	
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$	
Expresión correcta de la fórmula del error	
Apartado (b): 1 punto.	•
Expresión correcta de la distribución de la media muestral0,25 puntos	j.
Planteamiento de la probabilidad0,25 puntos	3 .
Cálculo correcto de la probabilidad0,50 puntos	i.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos). Apartado (a): 1 punto.	
Cálculo correcto del determinante y valor crítico	•
Apartado (b): 1 punto. Solución correcta del sistema	1,00 punto.
Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos). Apartado (a): 1 punto.	
Planteamiento correcto de la condición de continuidad en x=-1	•
Determinación del valor del parámetro	, i
Planteamiento correcto0	•
Cálculo de la primitiva0 Determinación del área0	•
Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos). Apartado (a): 1 punto.	
Determinación correcta de la derivada0	•
Determinación correcta de los intervalos pedidos0 Apartado (b): 1 punto.	,50 puntos.
Obtención correcta de los valores críticos	-
Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).	
Apartado (a): 1 punto. Planteamiento correcto0	50 puntos
Cálculo correcto de la probabilidad pedida0	•
Apartado (b): 1 punto. Planteamiento correcto0	•
Cálculo correcto de la probabilidad pedida0	,50 puntos.
Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos). Apartado (a): 1 punto.	
Expresión correcta de la fórmula del error	•
Despejar $z_{\alpha/2}$	•
Apartado (b): 1 punto. Fórmula correcta del intervalo de confianza0	.25 puntos
Cálculo correcto de z _{α/2} 0	,25 puntos.
Determinación correcta del intervalo de confianza0	,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.