



UNIVERSIDAD DE ALCALÁ
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS
DE LOS MAYORES DE 25 AÑOS
Curso 2018-19
MATERIA: MATEMÁTICAS



INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

INSTRUCCIONES: Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

TIEMPO MÁXIMO: Una hora y media.

CALIFICACIÓN: Cada ejercicio lleva indicada su puntuación máxima.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{r} x + y + 3z = 2m \\ 2x + 2y + mz = 4m \\ 5x \quad \quad - z = m \end{array} \right\}$$

- Discútase según los distintos valores del parámetro real m .
- Resuélvase para $m = 5$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Calcule la matriz inversa de A .
- Obtenga la matriz $(A + BC)'$ y determine si es simétrica e invertible. Nota: S^t denota la traspuesta de la matriz S .

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 108x$.

- Estúdiense sus extremos relativos.
- Calcúlese el área del recinto plano acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran el plano $\pi \equiv x - 2z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

- Determinese la posición relativa del plano π y la recta r .
- Calcúlese la distancia del punto $P(0,0,3)$ al plano π .

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El tiempo que dura la carga de la batería de un determinado tipo de ordenador se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 50 horas y una desviación típica 20 horas. Se ha elegido un ordenador aleatoriamente de este tipo.

- Calcúlese el porcentaje de veces que el tiempo dura entre 50 y 80 horas.
- Determinese el valor del tiempo de duración de la carga por debajo del cual se encuentra el 99% de los tiempos de carga.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real m :

$$\left. \begin{array}{l} -3x + my + 2z = -2 \\ 4x + 2y + 5z = 11 \\ 13x - my - mz = 15 \end{array} \right\}$$

- Discuta el sistema según los diferentes valores m .
- Resuélvase el sistema para el caso $m = -1$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \\ m & -m & 1 \end{pmatrix}$$

- Estúdiense el rango de A según los valores del parámetro real m .
- Para $m = 0$, calcule la matriz $(A^t + A^{-1})^4$, donde A^t denota la traspuesta de la matriz A y A^{-1} la inversa de la matriz A .

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - 4x^2}$$

- Estúdiense sus asíntotas.
- Determinense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en su dominio de definición.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 0)$ y $C(-1, 0, 1)$, y la recta dada por las ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Determinense la ecuación del plano π que pasa por los tres puntos A , B y C .
- Calcúlese la distancia del punto A a la recta r .

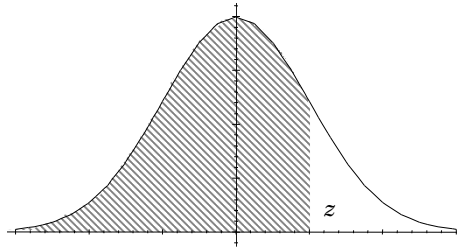
Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En un examen tipo test el 60% de los estudiantes conocen la respuesta correcta de una determinada pregunta. Sin embargo, hay un 15% de posibilidades de que un alumno que conoce la respuesta correcta escoja una respuesta incorrecta, y también hay un 25% de posibilidades de que un alumno que no sepa la respuesta correcta la adivine por azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que uno de estos alumnos elegido al azar conteste correctamente dicha pregunta?
- Si un estudiante contestó correctamente dicha pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que este alumno realmente sepa la respuesta?

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto del determinante de la matriz reducida.....0,50 puntos.

Discusión correcta.....0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema.....1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto.....0,50 puntos.

Cálculo correcto de la matriz inversa.....0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de la matriz.....0,50 puntos.

Discusión correcta sobre simetría e invertibilidad.....0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de la función derivada 0,25 puntos.

Cálculo correcto de los extremos relativos..... 0,25 puntos.

Determinación correcta del máximo y mínimo..... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto0,25 puntos.

Cálculo correcto de la función primitiva.....0,50 puntos.

Cálculo correcto de la integral definida.....0,25 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto.....0,50 puntos.

Determinación correcta de la posición relativa0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto.....0,50 puntos.

Cálculo correcto de la distancia del punto al plano.....0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto.....0,50 puntos.

Cálculo correcto del porcentaje pedido.....0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto.....0,50 puntos.

Cálculo correcto del tiempo pedido.....0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto del determinante de la matriz reducida.....0,50 puntos.

Discusión correcta.....0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema.....1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto del determinante de la matriz.....0,50 puntos.

Discusión correcta del rango de A.....0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo de la matriz inversa de A.....0,50 puntos.

Cálculo correcto de la matriz pedida.....0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a): 1 punto.

Obtención correcta de las asíntotas verticales.....0,50 puntos.

Obtención correcta de la asíntota oblicua.....0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de la función derivada.....0,50 puntos.

Determinación correcta de los intervalos de decrecimiento0,50 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto.....0,50 puntos.

Cálculo correcto del plano.....0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto.....0,50 puntos.

Cálculo correcto de la distancia del punto A a la recta r.....0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto.....0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto.....0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

MATEMÁTICAS
INDICACIONES A LA SOLUCIÓN

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & m \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5m - 30 = 0 \Rightarrow m = 6, \forall m \neq 6$ es un SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO pues $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$.

Si $m = 6$ entonces es un SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO, pues $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A^*)$.

b) Si $m = 5$ entonces es un SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO con solución única: $(1, 9, 0)$.

Ejercicio 2.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $X = (A + BC)' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right)' = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

X no es simétrica, pues $X \neq X^t$, pero sí es invertible ya que $|X| = 27 \neq 0$.

Ejercicio 3.

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 108x$$

a) $f'(x) = 6x^2 + 18x - 108 = 6(x+6)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -6$ y $x = 3$ son extremos relativos.

$$f'(x) = 12x + 18 \Rightarrow \begin{cases} f''(3) = 54 > 0 \Rightarrow x = 3 \text{ es mínimo} \\ f''(-6) = -54 < 0 \Rightarrow x = -6 \text{ es máximo.} \end{cases}$$

b) $f(x) < 0$ en $[2, 4]$, $\left| \int_2^4 f(x) dx \right| = \left| \int_2^4 (2x^3 + 9x^2 - 108x) dx \right| = \left| \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{9x^3}{3} - 108 \frac{x^2}{2} \right]_2^4 \right| = |-360| = 360$.

Ejercicio 4.

$\pi \equiv x - 2z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

a) $\begin{cases} x = -2y \\ y = -z + 3 \\ x - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 3 \\ x - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 0 & -2 & | & 2 \end{vmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$ la recta r es paralela al plano π .

Paralelos



b) $P = (0, 0, 3), \pi \perp (1, 0, -2); d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = 3'5777$

Ejercicio 5.

a) Sea X la v.a. "Tiempo que dura la carga longitud del pie de los varones" $\approx N(50, 20)$

$P(50 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{50-50}{20} \leq \frac{X-50}{20} \leq \frac{80-50}{20}\right) = P(0 \leq Z \leq 1'5) = P(Z \leq 1'5) - P(Z \leq 0) = 0'9332 - 0'5 = 0'4332 \Rightarrow 43'32\%$.

b) $P(X < x_0) = 0'99 \Rightarrow P\left(Z = \frac{X-50}{20} \leq \frac{x_0-50}{20} = z_0\right) = 0'99 \Rightarrow \frac{x_0-50}{20} = z_0 = 2'33 \Rightarrow x_0 = 2'33 \cdot 20 + 50 = 96'6$ horas.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

$$a) |A| = \begin{vmatrix} -3 & m & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 13 & -m & -m \end{vmatrix} = 4(m-1)(m+13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 1, 13 \text{ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO } \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*) \\ m = 1, 13 \text{ SISTEMA INCOMPATIBLE pues } \text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A^*) \end{cases}$$

b) Si $m = -1$ la solución es $(1, 1, 1)$.

Ejercicio 2.

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \\ m & -m & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 1, \text{ rango}(A) = 2, \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \\ m \neq \pm 1, \text{ rango}(A) = 3 \text{ pues } |A| \neq 0. \end{cases}$$

$$b) m = 0, (A^t + A^{-1})^4, A = A^t = A^{-1}, (A^t + A^{-1})^4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.

$$f(x) = \frac{x^3}{1-4x^2}$$

a) Asíntotas verticales: $x = \pm 1/2$. Asíntota oblicua: $y = -x/4$. Asíntota horizontal: no tiene.

$$b) \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1/2, 1/2\}; f'(x) = \frac{3x^2(1-4x^2) - x^3(-8x)}{(1-4x^2)^2} = \frac{x^2(3-4x^2)}{(1-4x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ es creciente en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y en $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, y f es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$.

Ejercicio 4.

a) El plano que pasa por los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 0)$ y $C(-1, 0, 1)$ es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -1-1 & 1-0 & 0-1 \\ -1-1 & 0-0 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2y + 2z - 2 = 0 \Rightarrow \pi: 2y + 2z = 2.$$

b) $A = (1, 0, 1)$, $P = (-1, -3, 0)$, $\vec{v}_r = (2, 1, 1)$, $\overline{PA} = (1, 0, 1) - (-1, -3, 0) = (2, 3, 1)$

$$d(A, r) = \frac{|\overline{PA} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\|}{|(2, 1, 1)|} = \frac{|(2, 0, -4)|}{|(2, 1, 1)|} = \frac{\sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-4)^2}}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1'82574.$$

Ejercicio 5. $P(A) = 0'6$, $P(\bar{A}) = 0'4$, $P(E|A) = 0'15$ y $P(\bar{E}|\bar{A}) = 0'25$

a) Teorema de la probabilidad total: $P(\bar{E}) = P(A)P(\bar{E}|A) + P(\bar{A})P(\bar{E}|\bar{A}) = 0'6 \cdot 0'85 + 0'4 \cdot 0'25 = 0'51 + 0'1 = 0,61$.

b) Teorema de Bayes: $P(A|\bar{E}) = \frac{P(A)P(\bar{E}|A)}{P(A)P(\bar{E}|A) + P(\bar{A})P(\bar{E}|\bar{A})} = \frac{0'6 \cdot 0'85}{0'61} = 0'836$.